Explorationen als Unterrichtsform

CHRISTIAN FAHSE, LANDAU

Zusammenfassung: *Das Wort „Exploration“ wird im Kontext der Stochastik meist als „Datenexploration“ verwendet. In diesem Artikel wird der Begriff „Exploration“ nicht fach-, sondern unterrichtsmethodisch aufgefasst und eine griffige Organisationsform für eine Doppelstunde vorgestellt. Durch das eigenständige Entdecken wird die inhaltliche Auseinandersetzung mit verschiedenen Themen der Stochastik intensiviert und gleichzeitig genutzt, dass beim Unterrichten dieses Themenbereichs besonders das Argumentieren und Kommunizieren gefördert werden kann.*

1 Zum Begriff Exploration

Viele Leserinnen und Leser dieser Zeitschrift werden bei „Exploration“ zunächst an „Datenexploration“ denken und damit den Begriff fachmethodisch fassen. Gängiger ist aber eine unterrichtsmethodische Verwendung des Wortes im Sinne einer forschend-entdeckenden Schüleraktivität. So z. B. in den deutschen Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss (KMK 2004, S. 11), in denen das Wort „Exploration“ nicht bei der Leitidee L5 Daten und Zufall, sondern bei L4 Raum und Form zu finden ist. Eine besondere Ausprägung erhält der Begriff hier durch den Bezug auf die Verwendung von Hilfsmitteln. Für die Primarstufe führt der Entwurf zur Einleitung des Schweizer Lehrplans 21 (D-EDK 2013, S. 13) den Begriff Exploration unter der Rubrik „Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten“ auf. Dies könnte man so interpretieren, dass es darauf ankommt, in der Erkundung konkreter Beispiele auf Allgemeines zu schließen. Beide Verordnungen legitimieren die unten beschriebenen Unterrichtsvorhaben. Genaue Begriffsklärungen finden sich aber nicht in ihnen, sondern z. B. in den folgenden Literaturstellen: Sjuts (2001) unterscheidet heuristische, divergente und beziehungshaltige (Wissens-)Explorationen, Ahrens (2011, S. 64 f.) grenzt wissenschaftstheoretisch den Begriff „Exploration“ vom „Experiment“ ab und Reiss & Ufer (2009, S. 162, vgl. S. 157) bezeichnen speziell eine Phase beim Beweisen als Exploration.

Im Gegensatz zu dieser offensichtlichen Vielfalt der Begriffsauffassung in der Literatur soll hier eine ganz konkrete methodische Form mit dem Wort „Exploration“ belegt werden. Dies mag einerseits dazu beitragen, den schillernden Begriff zu konkretisieren, andererseits wird damit eine leicht umzusetzende Unterrichtsform vorgestellt. Zur Abgrenzung könnte man hier vielleicht von einer „Stunden-Exploration“ sprechen, da die Methode typischerweise in einer Einzel- oder Doppelstunde zur Anwendung kommt. Sie sei wie folgt umrissen:

Eine Stunden-Exploration …

… ist eine methodische Form, in der die Lernenden selbstständig (1) und divergent (2) in wenigen Stunden (typischerweise einer Doppelstunde) (3) ein umgrenztes (4), aber reichhaltiges (5) Feld erkunden, systematisieren (6) und dokumentieren (7).

Abb. 1: Vorschlag zur Begriffsklärung

2 Beispiel für eine Aufgabenstellung

Diese Definition sei zunächst an einem Beispiel erläutert. Die Aufgabenstellung bezieht sich dabei auf ganz normalen Schulstoff, entscheidend ist im Folgenden allein die methodische Umsetzung.

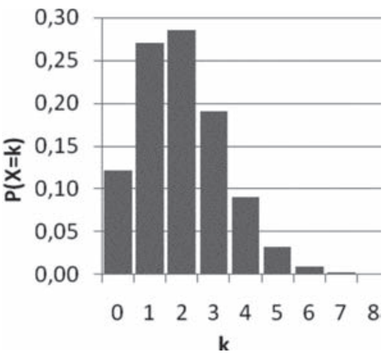


Abb. 2: Asymmetrisches Histogramm einer Binomialverteilung bei kleinem p (n = 20, p = 0,1)

Das Konzept wurde in mehreren eigenen Grund- und Leistungskursen in einem rheinland-pfälzischen Gymnasium sowie in Kursen von Lehrkräften, die an meinen Fortbildungen teilgenommen haben, erprobt. Zunächst wurde jeweils die Binomialverteilung problem- und handlungsorientiert anhand von Beispielen eingeführt. Eine Übersicht über diese Verteilung können Histogramme wie in Abb. 2 geben. Dabei wird die Wahrscheinlichkeit von k Erfolgen bei n Versuchen einer Bernoullikette in Abhängigkeit von k als Säulendiagramm dargestellt. Diese wurden zunächst per Hand für kleine n erstellt. Insgesamt konnte für die Exploration ein inhaltliches Verständnis der Binomialverteilung und die Kenntnis einzelner Histogramme sowie kumulierter Tabellen vorausgesetzt werden. Erwartungswert der Binomialverteilung und

Stochastik in der Schule 36 (2016) 2, S. 10–16

Streumaße waren hingegen noch nicht behandelt worden.

Für die Exploration wechselten die Kurse in den Computerraum, in dem folgender Arbeitsauftrag gestellt wurde:

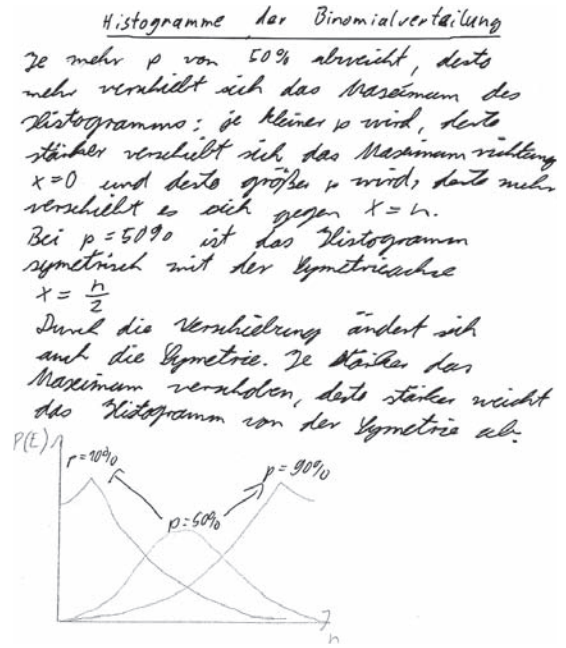
> *Untersuchen Sie die Histogramme der Binomialverteilung.*
>
> Überlegen Sie sich Fragen an die mit dem PC erstellten Diagramme, probieren Sie Varianten aus, notieren Sie Beobachtungen, Vermutungen von Gesetzmäßigkeiten und vielleicht gelingen Ihnen auch Begründungen. Dokumentieren Sie all Ihre Befunde schriftlich. Achten Sie auf einen gutes Zusammenspiel von korrektem Text, erläuterten Formeln und beschrifteten Abbildungen. Diagramme bitte von Hand abzeichnen. Sie haben 80 Minuten Zeit. Die Texte werden eingesammelt, Benotung vorbehalten.
>
> Eine Anleitung zur Erstellung von Diagrammen mit Tabellenkalkulation liegt aus. Bei Bedarf kann ich bei der Programmbedienung helfen – bitte ruhig melden, ich komme an den Platz.

Abb. 3: Aufgabenstellung einer Exploration. Der erste Satz ist austauschbar.

Sind zu wenig Computer vorhanden, kann in Paaren zusammengearbeitet werden. Da die eigenständige schriftliche Darstellung ein wesentlicher Aspekt der Methode ist (s. u.), sollten in diesem Fall die Explorationstexte einzeln verfasst werden. Bei meinen Lerngruppen funktionierte dies erstaunlich gut – die Texte unterschieden sich hinreichend.

3 Textbeispiele

Abb. 4 zeigt an einem Beispiel, welche Ergebnisse bei diesem Arbeitsauftrag zu erwarten sind. Man erkennt, dass die Texte nicht unbedingt umfangreich sind. Die Zeit für das Explorieren, das solch einem Text vorausgehen muss, ist nicht zu unterschätzen! Deutlich ist das Bemühen um Fachsprache erkennbar – sicherlich auch dadurch bedingt, dass es dieser Kurs in Kursarbeiten gewohnt war, mathematische Texte zu verfassen. Selbst in Lerngruppen, die hierin ungeübt sind, kann man mit einer Exploration einsteigen, sollte aber danach Kriterien für die Textgestaltung aufstellen oder durch den Arbeitsauftrag wie in Abb. 3 konkretisieren. Die Ausdrucksweise im Beispiel (Abb. 4) ist sehr klar und strukturiert. Das Bild, passend zum Text, hätte noch in den Text eingebunden werden können und korrekt beschriftet werden müssen. Es zeigt sich ein Grundverständnis für die Abhängigkeiten der Histogramme von p und n.


Histogramme der Binomialverteilung

Je mehr p von 50% abweicht, desto mehr verschiebt sich das Maximum des Histogramms: je kleiner p wird, desto stärker verschiebt sich das Maximum richtung x=0 und desto größer p wird, desto mehr verschiebt es sich gegen x=n.
Bei p=50% ist das Histogramm symetrisch mit der Symetrieachse $x = \frac{n}{2}$
Durch die Verschiebung ändert sich auch die Symetrie. Je stärker das Maximum verschoben, desto stärker weicht das Histogramm von der Symetrie ab.

Abb. 4: Text eines Leistungskursschülers der 12. Jahrgangsstufe. Die Achsenbeschriftung mit „*k*“ fehlt.

Sogar Feinheiten wie das Ansteigen des Maximums für immer kleinere bzw. immer größere p wurden festgehalten – allerdings nur zeichnerisch. Der erste Satz deutet auf einen funktionalen Denker (Schwank 2003) hin, indem er eine Animation beschreibt, die z. B. mit dynamischer Geometriesoftware realisiert werden könnte. Interessanterweise zeichnet dieser Schüler, wie auch einige andere, kein Histogramm, sondern geht bereits abstrahierend zu einhüllenden Kurven über.

In mehrfacher Hinsicht können sich weitere Einsichten an den Text in Abb. 4 anschließen. Z. B. könnte die Maximumstelle aus n und p berechnet werden wie im Text von Abb. 5. Dieser zweite Text versucht auch Begründungen zu geben, ein Qualitätsmerkmal, das dem Text aus Abb. 4 fehlt.

Der Textausschnitt in Abb. 5 dokumentiert darüber hinaus den Prozess des Erkenntnisgewinns bei einer Exploration. Ausgehend von Beispielen wird ein allgemeiner Zusammenhang erkannt, als Vermutung formuliert, überprüft und dann beispielgebunden begründet.

4 Möglicher Ertrag

Die beiden Texte zeigen, dass im Allgemeinen bei einer Exploration nur einzelne Aspekte im Rahmen der vorgegebenen Zeit untersucht werden können. Der Text aus Abb. 5 verdeutlicht aber auch, wie wertvoll jede einzelne gefundene Beobachtung, jeder einzelne entdeckte Zusammenhang ist: Hier wird Mathema-

Wahl Wenn sich nun n von 10 ~~zu~~ auf 50 ändert so liegt ein Maximum bei p= 0,5 bei 25 und bei p=0,3 bei 15, also immer die Hälfte.
Vermutung: Wenn ich n=100 wähle und z.B. p= 0,3 liegt das Maximum bei 30.
Das auswerten der Ergebnisse hat die Vermutung bestätigt.
Diese Beobachtung ist so zu begründen, da ~~man~~ bei 10 Versuchen und p=0,2 die Wahrscheinlichkeit am größten ist dass 20% dieser 10 Versuche gelingen, also 2.

Abb. 5: Auszug aus dem Text eines Leistungskursschülers.

tik nicht als fertig Gegebenes präsentiert, sondern von den Lernenden als selbst zu Gestaltendes erlebt. Wenn man als Lehrkraft Explorationen neu einsetzt, ist es wichtig, sich dieses Bildungszieles bewusst zu sein.

Aber Explorationen sind nicht nur im Hinblick auf die einzelnen Lernenden wertvoll, etwa in methodischer oder speziell heuristischer Hinsicht. Auch inhaltlich ergibt sich über die gesamte Lerngruppe hinweg ein hoher Ertrag, wie Abb. 6 zeigt.

Die Gesamtheit aller Schülertexte zeigt eine hohe Vielfalt innerhalb jedes Kurses und belegt, dass die Qualität der beiden bisher gezeigten Texte nicht ungewöhnlich, sondern durchaus zu erwarten ist. Generell stellt sich als Vorteil dieser Unterrichtsmethode heraus, dass die Summe aller Schülerergebnisse das Thema oft erschöpfend behandelt, weil die Lernenden verschiedene Aspekte untersuchen – die ersten sieben Merkmale aus Abb. 6 entdeckten z. B. alle meine Kurse.

Mögliche Kernaussagen einer Exploration zu Histogrammen der Binomialverteilung $B_{n;p}$

- Die Maximumstelle des Histogramms (der Modalwert) liegt nahe der Trefferzahl $n \cdot p$. Dies ist auch der Erwartungswert, da in n Versuchen der Anteil der Treffer p beträgt.
- Alle Histogramme steigen streng monoton bis zu einem Maximalwert und fallen dann monoton. Vertauschen von Erfolg und Misserfolg spiegelt an $n/2$. Hieraus folgen drei Aussagen:
  - Histogramme zu $p = 0,5$ sind symmetrisch.
  - Die beiden Histogramme zu den komplementären Wahrscheinlichkeiten p und $1 - p$ sind zueinander symmetrisch.
  - Histogramme mit $p = 0,5$ und ungeradem n haben kein isoliertes Maximum, sondern zwei Stellen mit gleicher Wahrscheinlichkeit. (Allgemein: Histogramme, bei denen $np + p$ eine natürliche Zahl ist)
- Für festes p gilt: Mit größer werdendem n ergibt sich immer deutlicher eine glockenförmige Gestalt. Diese ist zum Erwartungswert symmetrisch, denn zufällige Abweichungen nach unten oder oben sind (etwa) gleich wahrscheinlich.
- Für festes p gilt: Für größere n wird das Maximum kleiner. Denn: Die Summe der Säulenhöhen ergibt insgesamt 1 (das sichere Ereignis) und immer mehr Ergebnisse kommen in Betracht (vgl. Abb. 8).
- Für festes n gilt: Bei sehr kleinen oder sehr großen p ergeben sich asymmetrische Kurvenverläufe. Die Verzerrung bei sehr kleinen p erklärt sich aus der Formel für den Erwartungswert: Die wenigen Werte links vom Erwartungswert müssen eine höhere Wahrscheinlichkeit haben, um die vielen Werte rechts auszugleichen, s. Abb. 2. Für große p nahe 1 gilt Analoges.
- Für festes n gilt: Je stärker p von 0,5 abweicht, desto größer wird der Wert des Maximums. Eine interpolierende Kurve der Maxima hat parabelähnliche Gestalt (der linke Ast der Parabel ist in Abb. 8 gestrichelt angedeutet).
- Die Histogramme werden „breiter“ (im Sinne von Abb. 7), je näher p an 0,5 liegt bei gleichem n oder je größer n wird bei festem p. Bezogen auf die Versuchsanzahl n nimmt die *relative* „Breite“ hingegen ab.
- …

Abb. 6: Inhaltliche Ergebnisse, die von verschiedenen Lerngruppen entdeckt, allerdings nicht immer begründet wurden.

Bis zu welcher Tiefe dabei vorgedrungen werden kann, zeigt das Diagramm in Abb. 7. Der Schüler betrachtet die Breite der Histogramme. Diese ist für ihn die Länge des Intervalls auf der k-Achse, auf dem Säulen vorhanden sind, d. h. die Wahrscheinlichkeiten $B_{n;p}(k)$ nicht null sind. Dies wäre zwar streng genommen immer $[0; n]$, aber da der Schüler von gerundeten Werten ausgeht, betrachtet er de facto $|\{k|B_{n;p}(k) \geq \text{const}\}|$ (vgl. ähnlich Abb. 8, dort ist const = 0,01 %). Diese Intervallbreiten stellt er über der Versuchsanzahl n in seinem Diagramm (Abb. 7) dar und vermutet eine logarithmische Abhängigkeit.

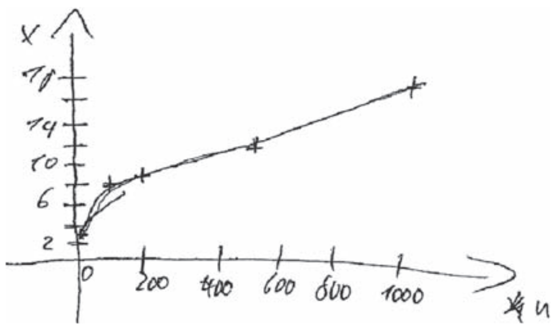


Abb. 7: Ein Leistungskursschüler untersuchte die Breite der Verteilung in Abhängigkeit von der Versuchsanzahl.

Ich griff als Lehrkraft diese Vermutung des Schülers in der Folgestunde auf und die Lernenden untersuchten zielgerichtet und nicht mehr frei explorierend diese Fragestellung. Dass die Abhängigkeit eher eine wurzelförmige ist, stellte einen willkommenen Einstieg in die Standardabweichung der Binomialverteilung dar.

Als noch wichtiger erscheint mir aber die Erfahrung für den Kurs, wie vielfältig eine Exploration sein kann, sowie die Anerkennung für die Leistung des sonst durchschnittlichen bis guten Schülers.

Ein sehr dichter Textauszug findet sich in Abb. 8. Die fachsprachlich nicht korrekte Verwendung von „signifikant“ zeigt, dass es nachfolgend einer „Regularisierung“ (im Sinne von Th. Jahnke 2001) bedarf – also eines Unterrichtsabschnittes, in dem die Lehrkraft nach der schüleraktiven Phase die üblichen Bezeichnungen einführt und im Unterrichtsgespräch Inhaltliches ergänzt oder glättet.

5 Merkmale einer Stundenexploration

An diesen konkreten Beispielen können jetzt die allgemeinen Merkmale einer Exploration aus Abb. 1 erläutert werden. Entscheidendes Kennzeichen dieser Unterrichtsform ist das hohe Maß an Selbstständigkeit (1) (eingeklammerte Zahlen beziehen sich im Folgenden auf die Begriffsdefinition in Abb. 1). Denn neben dem Zeitansatz sowie allgemeinen Kriterien für die Güte des Inhalts und der Darstellung wird nur das „Forschungsfeld“ vorgegeben, nicht jedoch mögliche Vorgehensweisen, Fragestellungen etc. Die wichtige Fähigkeit, diese selbst zu gestalten, ist gerade die Kompetenz, die eingeübt werden soll. Typischerweise werden also keine Hinweise zum Vorgehen gegeben, außer vielleicht bei der ersten Exploration. Die Besprechung der Schülerergebnisse führt aber auf folgende, für alle Explorationen nützliche Hinweise. Um etwa Vermutungen zu generieren, sollte man Beispiele betrachten. Die Erfahrung des Autors zeigt mit erstaunlicher Konstanz, dass es den Lernenden nicht leicht fällt, geeignete Beispiele zu konstruieren. Meist sind diese zu komplex, so dass Wesentliches schlecht erkennbar ist. Nach einer Phase des freien Ausprobierens empfiehlt es sich, von einfachen, überschaubaren Fällen auszugehen und diese systematisch zu variieren (funktional Denkende sind dabei wiederum im Vorteil, vgl. Schwank 2003). Hierdurch können sich dann bereits Hinweise für Begründungszusammenhänge ergeben. Findet man erstaunliche Phänomene, so sollte man diese direkt notieren und wiederum durch Variation alles Unwesentliche aus dem Beispiel entfernen, so dass der Kern des Phänomens klar hervortritt. Begründungen zu geben ist dann die höchste Stufe (vgl. Merkmal (6)), zu der in den Besprechungen immer wieder angeregt werden muss.

Merkmal (2) in Abb. 1 betont, dass die Fragestellungen und der Blick auf die untersuchten Phänomene vielfältig möglich und nicht vorgegeben sind. Abb. 6 deutet die Verschiedenheit der untersuchten Phänomene an. Diese werden zudem auf sehr unterschiedlichem Niveau untersucht. Im Grundkurs wurde z. B. ausführlich begründet, dass die Einhüllende der Histogramme keine sinusförmige, sondern eine glockenförmige Gestalt hat. Die gewährte Offenheit in den Inhalten setzt die Reichhaltigkeit des Themas (5) voraus und findet ihr Gegengewicht in der Notwendigkeit, das zu untersuchende Feld genau zu umreißen (4) sowie in der Betonung der Dokumentation (7). Die Reichhaltigkeit (5) ist auch die Voraussetzung dafür, dass geeignete Zusammenhänge (D-EDK 2013, Sjuts 2001) vorhanden sind, die zunächst phänomenologisch, dann aber auch begründend aufgezeigt werden können. Dies sei in dem Merkmal des Systematisierens (6) zusammengefasst.

6 Dokumentation

Das Merkmal der Dokumentation (7) sollte in zweifacher Weise nicht unterschätzt werden: Es sichert einerseits die Verbindlichkeit bei aller Freiheit des

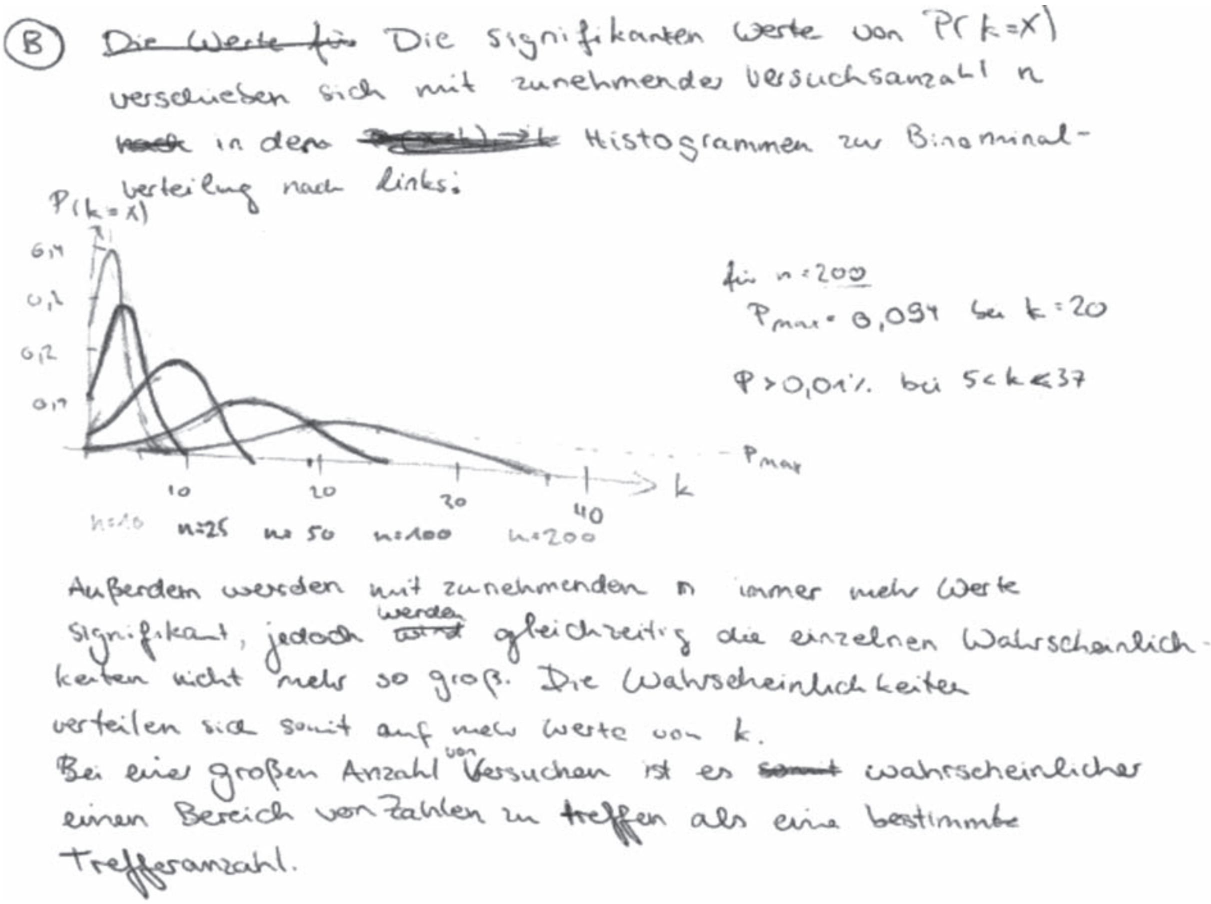


Abb. 8: Textauszug einer Schülerin, die inhaltlich sehr viel in einem Diagramm veranschaulicht, aber nicht ausführlich erläutert und begründet. Mit „signifikant“ ist „bedeutsam“ im Sinne von „größer als 0,01 %“ gemeint. Statt „links“ muss es im ersten Satz „rechts“ heißen.

Erkundens und etabliert andererseits die Kompetenz K6 (Kommunizieren, KMK 2004) als wesentlichen Bestandteil dieser textproduzierenden Unterrichtsform (Maier 2000). Diejenigen, die gut entdecken können, sind nicht immer diejenigen, die auch gut darstellen können – auch diese Fähigkeit kann (und soll) hier geübt werden. Da sich erfahrungsgemäß viele Lernende diesem Teil der Aufgabe zu entziehen versuchen, muss die Dokumentation klar eingefordert werden – z. B. mit dem Hinweis, direkt alles Gefundene oder Gedachte zu notieren.

Die als Notbehelf entstandene Aufforderung, Ausgaben des Computers abzuzeichnen, erwies sich mit der Zeit als didaktischer Kniff, der bei Explorationen am Computer grundsätzlich eingehalten werden sollte: Durch das eigenständige Zeichnen wird abstrahiert, also Wesentliches von Unwesentlichem getrennt, Strukturen herausgestellt und kommentiert. Speziell im Text aus Abb. 4 mag man in dem Übergang vom treppenförmigen Histogramm zum gezeichneten stetigen Graphen eine Modellierungsleistung sehen, die im Hinblick auf die später zu behandelnde Approximation durch die Normalverteilung ein fruchtbarer Schritt ist.

7 Benotung

Falls Gütekriterien in vorangehenden Explorationen erarbeitet wurden, kann auch eine Benotung erfolgen. Beim Text in Abb. 4 würde z. B. die Rechtschreibung, insbesondere auch die der Fachbegriffe, bei der Bewertung moniert werden. Sehr positiv zu sehen ist die Fülle, Differenziertheit und Korrektheit der inhaltlichen Beobachtungen, auch wenn diese im Unterschied zum Text aus Abb. 5 nicht weiter begründet werden. Diese Fülle und die Klarheit der Darstellung sprächen für eine Bewertung im noch guten Bereich. Falls Sie diese Einschätzung überraschen sollte, bedenken Sie, dass jede Beobachtung 90 Minuten vorher noch nicht in Sicht war und damit völlig neu gefunden wurde.

8 Weitere Explorationen

Es ist nicht ganz leicht, geeignete (Forschungs-) Felder zu finden. Denn diese müssen einerseits klar umrissen, attraktiv und vor allem reichhaltig sein (5), also eine Fülle an Beobachtungen, Fragestellungen, Begründungen sowie inhaltlichen Verknüpfungen zulassen. Und dies auf unterschiedlichem Niveau, wodurch diese Methode ganz natürlich binnendifferenzierend wirkt. Bezogen auf die Leitidee Daten und Zufall seien die folgenden Beispiele genannt:

Wer geht zur Stadtmeisterschaft? (Kl. 5)

In den letzten Sportstunden sind drei Schülerinnen folgende Weiten gesprungen – wer soll die Klasse bei den Stadtmeisterschaften vertreten? (verändert nach Neue Wege 6 (2007), S. 221)

Anna	3,40 m	3,31 m	3,54 m	3,60 m	3,65 m
Britta	3,59 m	3,49 m	3,53 m	3,64 m	3,55 m
Caro	3,49 m	3,38 m	3,71 m	3,44 m	3,48 m

(Anna hat die beste Tendenz, Britta den besten Durchschnitt und Caro den höchsten Maximalwert.)

Diagramme zum empirischen Gesetz der großen Zahlen (Kl. 8 und Oberstufe)

Die Kurse erhalten eine Anleitung, wie sie mit einer Tabellenkalkulation Diagramme zum empirischen Gesetz der großen Zahlen (Abb. 9) erzeugen können oder alternativ das fertige Tabellenblatt. Mit einstellbarer Wahrscheinlichkeit p wird (mindestens 200-mal) eine Zufallszahl mit den Werten 0 oder 1 bestimmt und nach jeder Zufallsziehung die bisherige relative Häufigkeit einer 1 bestimmt. Diese relativen Häufigkeiten h_n werden über den Versuchsanzahlen n (von 1 bis z. B. 200) aufgetragen und die zugehörigen Graphen mit der Taste F9 sehr oft neu erzeugt. Sind Explorationen als Methode bekannt, ist kein weiterer Arbeitsauftrag nötig. Phänomene, die erkannt und auf unterschiedlichem Niveau begründet werden können, sind z. B.:

- Die Graphen nähern sich mit wachsender Versuchsanzahl n dem Wert p an.
- Zu Anfang (bei kleinem n) schwanken die Graphen stark, selbst bei $n = 200$ zeigt sich noch eine überraschend deutliche Varianz. Bei gedrückt gehaltener F9-Taste erkennt man den Trichter des $1/\sqrt{n}$-Gesetzes.
- Der Wert 0 oder 1 kann nicht mehr angenommen werden, wenn h_n einmal von 0 bzw. 1 abgewichen ist.
- Oft haben die Graphen Sprünge und weisen dann monoton steigende, konkave Abschnitte für $p > 0{,}5$ bzw. fallende, konvexe Abschnitte für $p < 0{,}5$ auf (Abb. 9).

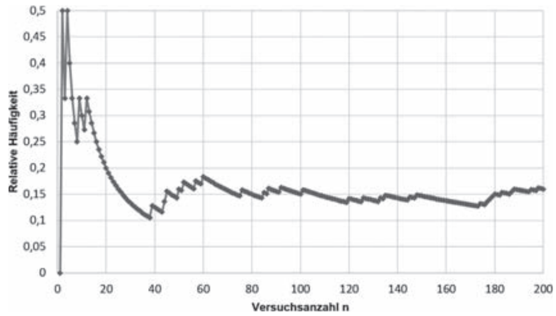


Abb. 9: Relative Häufigkeit über der Versuchsanzahl

Pascal-Dreieck, Binomialkoeffizient und $(a + b)^n$ (Oberstufe)

Die Bildungsvorschrift für das Pascaldreieck sowie die Formel für den Binomialkoeffizienten werden schriftlich vorgegeben. Insbesondere für die Berechnung von $(a + b)^n$ wird ein CAS-System bereitgestellt. Der Arbeitsauftrag lautet: Untersuche die drei mathematischen Objekte und finde Zusammenhänge. Während die Gleichheit der auftretenden Koeffizienten offensichtlich ist, liegt hier der Schwerpunkt auf den Bezügen, z. B. „Es gibt $9 + 1 = \binom{10}{1}$ Möglichkeiten, genau ein a und 9-mal das b aus den 10 Faktoren des Terms $(a + b)^{10}$ auszuwählen.“ Über das Pascal-Dreieck und die hieran zu entdeckenden Beziehungen erhält man leicht Eigenschaften der Binomialkoeffizienten, die z. T. auch innerhalb der Exploration bewiesen werden könnten $\left(\text{etwa } \binom{n}{1} = n\right)$. Bei dieser Exploration bietet es sich deshalb besonders an, vorher auf das Begründen und Beweisen als Teil einer Exploration hinzuweisen.

Entwicklung einer Vielfalt von Streumaßen

Es werden die Individuenzahlen pro Quadratmeter von zwei Populationen vorgegeben (z. B. fiktive Zahlen aus zwei Seepocken-Habitaten mit unterschiedlicher Nähe zum Meer). Die Populationen unterscheiden sich im Mittelwert geringfügig (relativ zur absoluten Größe), aber aufgrund der differierenden Umwelteinflüsse schwanken die Datenreihen verschieden stark. Diese Exploration ist insofern untypisch, als sie sich in zwei Teile gliedert. Zuerst müssen die beiden Datenreihen gesichtet, bewertet und biologisch interpretiert werden – eine gängige problemorientierte Phase. In einem zweiten Schritt werden die Lernenden aufgefordert, eine Größe zu definieren, welche die Stärke der Schwankungen misst, und diese Größe dann an selbst erfundenen Datenreihen zu erproben – dies ist die eigentliche Exploration. Mein letzter Leistungskurs diskutierte u. a. folgende Möglichkeiten während der Präsentation der Explorationen:

- $x_{max} - x_{min}$ – Spannweite
- $(x_{max} - x_{min})/n$ – „Relative“ Spannweite
- $x_{max} - x_{min}$ nach Streichen von Ausreißern
- $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})/n$ – Mittelwert der Abweichungen vom Mittelwert
- $\sum_{i=1}^{n} (x_{1i} - x_{2i})$ – paarweiser Vergleich
- $\sum_{i=1}^{n} (x_{i+1} - x_i)$ – Summe der Zunahmen
- $\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|$

Die mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert (Varianz) muss normalerweise von der Lehrkraft ergänzt werden, wobei man organisch an die Idee des letzten Vorschlages anschließen kann. Die Besprechung gerade der nicht zielführenden Vorschläge ist interessant – beim 4., 5. und 6. Vorschlag kann sogar rechnerisch vereinfacht werden. Der Wert 0 bei Vorschlag 4 ergab direkt die Bestimmungsgleichung für den Mittelwert – ein typisches Beispiel dafür, dass Explorationen auf interessante Sachverhalte führen, die den Standardstoff ergänzen.

Zur Reichhaltigkeit (5) all dieser Beispiele gehört auch, dass sie relevante Themen der Lehrpläne erschließen.

9 Fazit

Das Prinzip der hier vorgeschlagenen Unterrichtsform ist alles andere als neu. Entdeckendes Lernen (Winter 1989), Mathematische Reisetagebücher (Gallin & Ruf 1998), Lernumgebungen (Wittmann 1992), textliche Eigenproduktionen (H. Maier 2000, S. 12, dort „Problemlöse- oder Untersuchungsbericht“) seien stellvertretend genannt. Die Stoßrichtung dieses Artikels geht dahin, zu zeigen, wie solch eine kompetenzorientierte Unterrichtsform in der alltäglichen Schulpraxis umgesetzt werden kann – mit realistischem Zeitansatz und der Möglichkeit zur Benotung. Während die einzelnen Schülertexte einerseits an ausgewählten Stellen in die Tiefe gehen können, ergibt sich andererseits in der Gesamtheit der Lerngruppe im Allgemeinen eine erfreuliche Ertragsbreite. Beim eigenständigen Forschen wechseln Phasen des offene Erkundens, bei denen nicht nur die Fragestellungen („die Reiseziele“), sondern bisweilen sogar die Sichtweisen („Brille und Sprache“) erst noch entwickelt werden müssen, mit Phasen ab, in denen selbstgenerierte Vermutungen zielgerichtet überprüft werden. Auch wenn insbesondere das offene Erkunden gewöhnungsbedürftig ist, erfordern solche Explorationen keine grundsätzlich andere Ausrichtung des eigenen Unterrichts, da sie punktuell eingesetzt werden können. Nebenwirkungen auf den sonstigen Unterricht sind allerdings nicht ausgeschlossen, sondern sogar erwünscht.

Literatur

Ahrens, S. (2011): Experiment und Exploration: Bildung als experimentelle Form der Welterschließung (Bd. 22). Bielefeld: transcript Verlag.

Deutschschweizer Erziehungsdirektoren-Konferenz (D-EDK) (Hrsg.) (2013): Lehrplan 21. Konsultationsfassung Juni 2013. Luzern. http://konsultation.lehrplan.ch/downloads/container/31_102_0_1_0.pdf. (Zugriff: 15.1.2016)

Gallin, P.; Ruf, U. (1998): Sprache und Mathematik in der Schule. Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz. Seelze: Kallmeyer.

Jahnke, T. (2001): Normaler produktiver Mathematikunterricht. In: W. Herget, T. Jahnke, W. Kroll: *Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I.* Berlin: Cornelsen, S. 5–11.

Kultusministerkonferenz (Hrsg.) (2004): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. München: Luchterhand.

Lergenmüller, A.; Schmidt, G. (Hrsg.) (2007): Mathematik Neue Wege 6. Arbeitsbuch für Gymnasien Rheinland Pfalz. Braunschweig: Bildungshaus Schulbuchverlage.

Maier, H. (2000): Schreiben im Mathematikunterricht. In: *mathematik lehren* 99, S. 10–13.

Reiss, K.; Ufer, S. (2009). Was macht mathematisches Arbeiten aus? Empirische Ergebnisse zum Lernen von Argumentationen, Begründungen und Beweisen. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 111, S. 155–177.

Schwank, I. (2003): Einführung in prädikatives und funktionales Denken. In: *ZDM* 35(3), S. 70–78.

Sjuts, Johann (2001): Aufgabenstellungen zum Umgang mit Wissen(srepräsentationen). In: *Der Mathematikunterricht* 47(1), S. 47–60.

Winter, H. (1989): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik. Braunschweig: Vieweg.

Wittmann, E. Ch. (1992): Mathematikdidaktik als ‚design science‘. In: *Journal für Mathematikdidaktik* 13, S. 55–70.

Anschrift des Verfassers

Christian Fahse
Institut für Mathematik
Fortstraße 7
76829 Landau
fahse@uni-landau.de